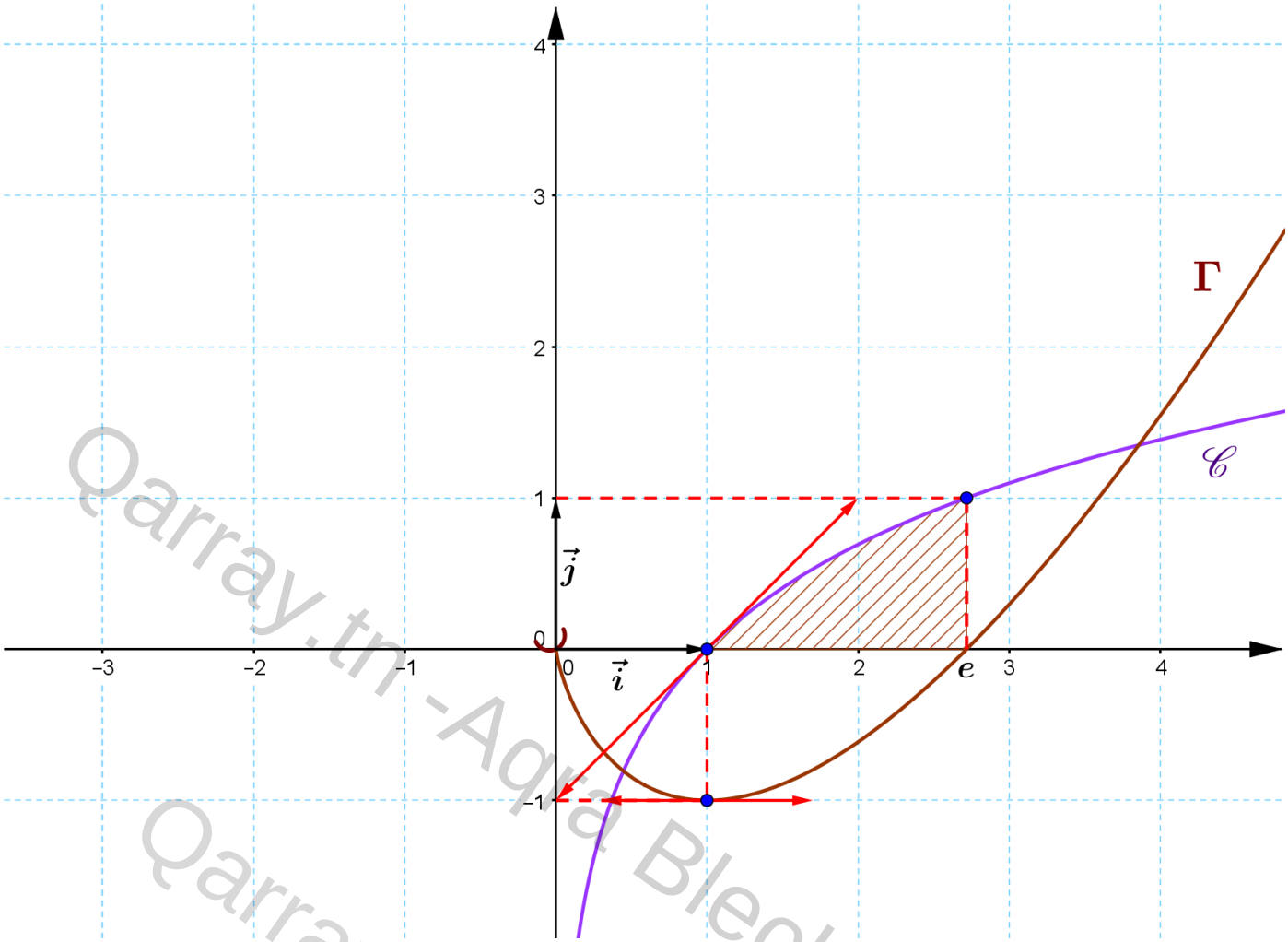
EXERCICE N°3 :	30'	6 points	

Dans la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$ et Γ sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, respectivement d'une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et de sa fonction **primitive** F.

Chacune des courbe $\mathscr{C}$ et Γ, admet une branche parabolique, une de direction $(O,\vec{i})$ et l'autre de direction $(O,\vec{j})$.



Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn

À l'aide de ces données et par lecture graphique :

1°) a) Donner $f'(1)$, $F'(1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

b) Vérifier que l'aire de la partie hachurée est égale à 1.

c) Calculer $\int_1^e f(x)\,F(x)\,dx$.

2°) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR.

(On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$).

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

c) Tracer dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}'$ et la tangente à $\mathscr{C}'$ au point d'abscisse 0.

d) Soit $I=\int_0^1\left(e-f^{-1}(x)\right)dx$. Interpréter graphiquement l'intégrale I puis calculer sa valeur exacte.

3°) On admet que $f(x)=a\ln(x)+b$ pour tout $x>0$ où a et b des constantes réelles.

a) Exprimer en fonction de a et b, $f(1)$ et $f(e)$.

b) En déduire que f est la fonction logarithme népérien.